

# 对称配筋混凝土正截面承载力计算的叠加法

田广宇 叶列平 曲哲

(清华大学土木工程系 北京 100084)

**[摘要]** 现行《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002)中正截面承载力的计算方法是基于平截面假定的等效矩形计算方法。这种方法应用于对称配筋小偏心受压构件计算时很繁琐。采用叠加方法对正截面承载力的计算方法进行了简化。结果表明,叠加方法不仅以塑性理论下限解为理论基础,且所得到的简化计算公式简便适用,与平截面法和规范方法计算结果的误差在工程可接受的范围内。

**[关键词]** 钢筋混凝土 正截面承载力 叠加方法 下限解

**Simplified Method for Flexural Strength of RC Members Based on Superposition Method/Tian Guangyu, Ye Lieping, Qu Zhe** (Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The calculation of flexural strength of reinforced concrete members in Code for Design of Concrete Structures (GB50010-2002) is the equivalent rectangle method based on the plane section assumption. This method is inconvenient to symmetrical reinforced members. A simplified method is proposed, which is based on the superposition theory. The superposition theory has the lower bound theorem of the plastic theory as its foundation. The simplified formula of the superposition theory is easy to use and its result is quite close to the accurate solution of the plane section method.

**Keywords:** reinforced concrete; flexure strength; superposition theory; lower bound solution

## 1 概述

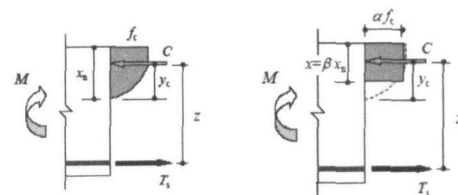
现行《混凝土结构设计规范》(GB50010-2002)<sup>[1]</sup>(以下简称《规范》)对于正截面承载力的计算是基于平截面假定的等效矩形面积方法(以下简称等效矩形法)。这种方法是对平截面理论计算方法(以下简称平截面法)的简化,但是在应用中仍有诸多不便,尤其是对称配筋小偏心受压承载力计算。

除了《规范》的等效矩形法,《钢筋混凝土结构设计规程》说明中的基于叠加原理的轴力分配法(以下简称轴力分配法)计算十分简便<sup>[2,3]</sup>。本文对该方法用于对称配筋钢筋混凝土正截面承载力计算的适用性进行了分析研究。

## 2 平截面法和等效矩形法

平截面法和等效矩形法是现行规范规定的方法。平截面法在理论上具有完备性,属于正截面承载力计算的理论方法,本文将将其计算结果作为精确解。平截面法的计算假设是截面应变分布符合平截面,并借助于《规范》规定的混凝土应力应变关系和钢筋应力应变关系,忽略截面上混凝土拉力的影响,利用截面平衡条件,即可对任意截面计算其正截面承载力。但其计算必须借助计算机程序完成,不便于工程直接应用。

等效矩形法是在平截面法基础上将受压区混凝土应力图形(图1(a))等效为矩形应力图的简化计算方



(a)平截面法应力图 (b)等效矩形应力图

图1 截面应力

法,如图1(b)所示。混凝土等效矩形应力图的合力为

$$N_c = \int_0^x \sigma_c(x) b dx = \alpha f_c \beta x b \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} N_c &= \int_0^x \sigma_c(x) b (h_0 - x) dx \\ &= \alpha f_c \beta x b \left[ h_0 - \frac{x}{2} \right] \quad (1b) \end{aligned}$$

式中: $N_c$ 、 $M_c$ 分别为混凝土轴力和弯矩; $h$ 、 $h_0$ 和 $b$ 分别为截面高度、截面有效高度和截面宽度; $f_c$ 为混凝土抗压强度; $x_n$ 为混凝土受压区高度; $x$ 为混凝土等效矩形应力图受压区高度; $\alpha$ 和 $\beta$ 分别为受压区混凝土等效矩形应力图系数。

尽管等效矩形法在很多情况下简化了计算,但有时仍过于复杂,尤其是在对称小偏心受压计算时,存在求解3次方程问题,而规范给出的近似计算公式又过于复杂。

### 3 叠加方法

叠加方法是钢筋混凝土构件正截面承载力计算所采用的方法<sup>[2]</sup>,其计算十分简便。该方法用于对称配筋混凝土正截面承载力计算时,认为其承载力是由纯混凝土部分和纯钢筋部分叠加得到的。纯混凝土部分和纯钢筋部分  $N-M$  曲线如图 2(a)和图 2(b)所示,两部分承载力叠加后的对称配筋混凝土正截面承载力如图 2(c)所示。

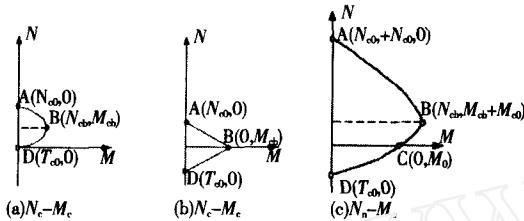


图 2 混凝土和钢筋的  $N-M$  相关曲线

混凝土部分按矩形应力图考虑,其  $N_c-M_c$  曲线可表示为:

$$M_c = \frac{N_c}{2} \left( h - \frac{N_c}{f_c b} \right) \quad (2)$$

其中,  $N_{c0} = f_c b h$ , 表示纯混凝土截面纯压状态的极限轴力;  $M_{cb} = \frac{1}{8} f_c b h^2$ ,  $N_{cb} = 0.5 f_c b h$ , 分别表示纯混凝土截面最大弯矩和对应的轴力。

纯钢筋部分的  $N_s-M_s$  曲线可表示为:

$$\frac{|N_s|}{N_{s0}} + \frac{M_s}{M_{s0}} = 1 \quad (3)$$

式中,  $N_{s0} = 2f_y A_s$ , 表示钢筋纯拉和纯压状态的极限轴力;  $M_{s0} = f_y A_s (h - 2a)$ , 表示纯钢筋部分纯弯状态的极限弯矩, 其中  $a$  为钢筋形心到截面边缘的距离。

叠加后钢筋混凝土截面的承载力为,

$$\begin{cases} N = N_c + N_s & (4a) \\ M = M_c + M_s & (4b) \end{cases}$$

由以上式(2)和式(3), 只要求得任何一部分的轴力, 即可联立式(4), 方便地求得截面的受弯承载力  $M$ 。

根据塑性理论的下限定理<sup>[4]</sup>: 满足平衡条件且不破坏塑性弯矩条件的应力场, 它能和外荷载平衡, 则这个外荷载不会比极限荷载大。为此, 将钢筋的轴力  $N_s$  作为变量, 混凝土轴力  $N_c$ 、混凝土弯矩  $M_c$ 、钢筋弯矩  $M_s$  和总弯矩  $M$  均表示为  $N_s$  的函数, 求其最大值即可求得在该轴力作用下的极限弯矩。由式(3)可得:

$$M_s = \left( 1 - \frac{|N_s|}{N_{s0}} \right) M_{s0} \quad (5)$$

将式(2), (5)代入式(4b), 得

$$M = M_c + M_s = \frac{N_c}{2} \left( h - \frac{N_c}{f_c b} \right) + \left( 1 - \frac{|N_s|}{N_{s0}} \right) M_{s0} \quad (6)$$

对于大偏压和偏拉状态, 由于  $\sigma'_s < f_y$ ,  $\sigma_s < f_y$ , 所以  $N_s = \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s < 0$ , 并注意到式(4a), 则式(6)可表示为:

$$M = -\frac{1}{2f_c b} \left[ N_s - f_c b \left( \frac{N}{f_c b} - \frac{h}{2} + \frac{M_{s0}}{N_{s0}} \right) \right]^2 + \frac{f_c b}{2} \left( \frac{N}{f_c b} - \frac{h}{2} + \frac{M_{s0}}{N_{s0}} \right)^2 + M_{s0} + \frac{N}{2} \left( h - \frac{N}{f_c b} \right) \quad (7)$$

当  $f_c b \left( \frac{N}{f_c b} - \frac{h}{2} + \frac{M_{s0}}{N_{s0}} \right) < 0$ , 即  $N < f_c b a$  时, 中轴为负数,  $N_s$  可以取到中轴, 此时极限弯矩为

$$M_{\max} = N \left( \frac{h}{2} - a \right) + M_{s0} \quad (8)$$

当  $f_c b \left( \frac{N}{f_c b} - \frac{h}{2} + \frac{M_{s0}}{N_{s0}} \right) > 0$ , 即  $N > f_c b a$  时, 中轴为正, 但由于为大偏压和偏拉状态,  $N_s$  必须为负, 所以  $N_s$  不能取中轴, 而应当取  $N_s = 0$ , 才能使得  $M$  最大, 故有:

$$M_{\max} = M_{s0} + \frac{N}{2} \left( h - \frac{N}{f_c b} \right) \quad (9)$$

对于小偏压状态, 与以上分析方法相同, 可得,

当  $N > f_c b h_0$  时,

$$M_{\max} = N \left( h_0 + \frac{h}{2} \right) + \frac{f_c b h_0^2}{2} + M_{s0} \quad (10)$$

当  $N \leq f_c b h_0$  时,

$$M_{\max} = M_{s0} + \frac{N}{2} \left( h - \frac{N}{f_c b} \right) \quad (11)$$

综合式(8)~(11), 可以得到对称配筋钢筋混凝土截面正截面承载力  $N-M$  相关关系如下:

$$M_{\max} = \begin{cases} N \left( \frac{h}{2} - a \right) + \frac{f_c b a^2}{2} + M_{s0} & (-2f_y A_s \leq N \leq f_c b a) \\ \frac{N}{2} \left( h - \frac{N}{f_c b} \right) + M_{s0} & (f_c b a < N \leq f_c b h_0) \\ -N \left( \frac{h}{2} - a \right) + \frac{f_c b h_0^2}{2} + M_{s0} & (f_c b h_0 < N \leq f_c b h + 2f_y A_s) \end{cases} \quad (12)$$

以上方程表明,  $N-M$  曲线关于界限破坏  $N = N_b$  对称, 是由两段直线和一段二次曲线组成。二次曲线段钢筋的合力为零, 曲线形状和素混凝土受压弯的  $N-M$  曲线形状相同。这是因为叠加原理没有平截面假定这一约束, 弱化了极大值状态的条件, 这样弱化可以使钢筋应力对于截面几何形心的弯矩最大, 也就是受拉和受压钢筋应力都最大(屈服), 但方向相反, 从而钢筋合力为零。直线段混凝土轴力是不变的, 混凝土弯矩是一个定值, 整个曲线的形状与钢筋的  $N-M$  曲线的形状相同。

由式(12)也可以根据给定的轴力和弯矩方便地反求配筋面积。

#### 4 轴力分配法

尽管上述叠加法得到的  $N-M$  曲线的计算公式十分简单,但计算结果有时略偏于不安全(见后面的算例)。不过由塑性理论下限解定理可知,满足式(4a)轴力平衡方程的纯混凝土部分和纯钢筋部分的任意轴力分配,代入式(2)和式(3)求得纯混凝土部分和纯钢筋部分的弯矩,进而再由式(4b)计算得到的纵弯矩,总是小于以上塑性理论下限解结果。为此,文[3]根据钢骨混凝土构件的正截面承载力分析,建议了钢筋部分的近似轴力分配公式。将该公式用于钢筋混凝土截面,可得以下纯钢筋部分轴力分配系数:

$$\alpha_s = \begin{cases} \frac{N - N_{cb}}{N_{cb} + N_{s0}} = \frac{N_s}{N_{s0}} & (-N_{s0} \leq N \leq N_{cb}) \\ \frac{N - N_{cb}}{N_{c0} + N_{s0} - N_{cb}} = \frac{N_s}{N_{s0}} & (N_{cb} < N \leq N_{c0} + N_{s0}) \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中的符号与图2中的符号意义相同。

以下给出轴力分配法的相关曲线:大偏压:

$$M = \frac{N + N_{s0}}{N_{cb} + N_{s0}} (M_{s0} + \frac{N_{c0} + N_{s0} - N}{N_{cb} + N_{s0}} M_{cb}) \quad (14)$$

小偏压:

$$M = \frac{N_{c0} + N_{s0} - N}{N_{c0} + N_{s0} - N_{cb}} (M_{s0} + \frac{N_{s0} + N}{N_{c0} + N_{s0} - N_{cb}} M_{cb}) \quad (15)$$

其中,  $N_{c0} = f_c b h$ ,  $N_{s0} = 2f_y A_s$ ,  $N_{cb} = \frac{1}{2} f_c b h$ ,  $M_{s0} = f_y A_s (h -$

$2a)$ ,  $M_{cb} = \frac{1}{8} f_c b h^2$ 。

#### 5 算例分析

算例1:对称配筋矩形截面,  $h \times b = 600 \times 500$ ,  $a = 45$  mm, C35级混凝土, HRB400级钢筋。按配筋面积  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$  (单侧配筋率1%)和  $A_s = 900 \text{ mm}^2$  (单侧配筋率0.3%)两种情况分析。分别用平截面法、等效矩形法、叠加法和轴力分配法计算正截面承载力  $N-M$  曲线,结果如图3(由于两种配筋的  $N-M$  曲线形状相似,故图3仅给出  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$  的  $N-M$  曲线)。

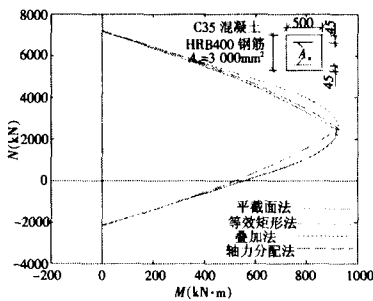


图3  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$  四种算法的  $N-M$  相关曲线比较

由图3结果对比可知,式(12)叠加法在偏拉和大

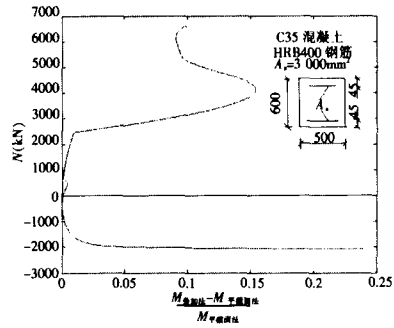


图4  $A_s = 3000 \text{ mm}^2$  时叠加法和平截面法  $N-M$  曲线相对误差

偏压范围与平截面法相差非常小,而在小偏压阶段,叠加法所得弯矩比平截面法偏大,但是误差不大,对于工程设计而言可以接受。图4给出了叠加法和平截面法弯矩相对误差。当轴压和轴拉时,叠加法弯矩不为零,相对误差无穷大,但绝对误差很小。其他情况下的相对误差属于工程可以接受的范围。

表1进一步给出了  $N = 4000 \text{ kN}$  (小偏压)和  $N = 500 \text{ kN}$  (大偏压)下各种方法极限弯矩的计算结果比较,可见对大偏压情况叠加法很准确,但对小偏压情况叠加法的结果偏大较多,而轴力分配法的误差很小。

算例1 极限弯矩比较 表1

$A_s = 900 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.3\%$	弯矩	平截面法	等效矩形法	叠加法	轴力分配法
$N = 500 \text{ kN}$	$M$ (kN·m)	298.75	299.41	300.27	283.83
	相对误差(%)	—	0.22	0.51	-5.00
$N = 4000 \text{ kN}$	$M$ (kN·m)	357.9	377.34	407.11	378.12
	相对误差(%)	—	5.43	13.19	5.65
$A_s = 3000 \text{ mm}^2$ $\rho = 1\%$	弯矩	平截面法	等效矩形法	叠加法	轴力分配法
$N = 3000 \text{ kN}$	$M$ (kN·m)	683.18	683.92	685.90	620.46
	相对误差(%)	—	0.11	0.40	-9.18
$N = 4000 \text{ kN}$	$M$ (kN·m)	685.18	697.47	792.00	711.56
	相对误差(%)	—	0.15	15.59	3.85

算例2 三种方法计算配筋面积 表2

组合	荷载	规范法	叠加法	轴力分配法
(1)	$N = 1000 \text{ kN}$ $M = 800 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$A_s = 3080 \text{ mm}^2$ $\rho = 1.28\%$	$A_s = 3080 \text{ mm}^2$ $\rho = 1.28\%$	$A_s = 2149 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.90\%$
(2)	$N = 4000 \text{ kN}$ $M = 600 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$A_s = 2826 \text{ mm}^2$ $\rho = 1.18\%$	$A_s = 2435 \text{ mm}^2$ $\rho = 1.01\%$	$A_s = 2841 \text{ mm}^2$ $\rho = 1.18\%$
(3)	$N = 1500 \text{ kN}$ $M = 400 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$A_s = 554 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.23\%$	$A_s = 530 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.22\%$	$A_s = 363 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.15\%$
(4)	$N = 3500 \text{ kN}$ $M = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$A_s = 371 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.15\%$	$A_s = 282 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.11\%$	$A_s = 361 \text{ mm}^2$ $\rho = 0.15\%$

(下转第5-65页)

区的面积配箍特征值见表 2。

RC 连梁面积配箍特征值要求 表 2

$\theta_{u, dem}$		1%	1.5%	2%	2.5%	3%
式 (10a)	1/50	0.055	0.093	0.132	0.170	0.208
	1/75	0.027	0.052	0.078	0.103	0.129
	1/100	0.012	0.032	0.051	0.070	0.089
	1/150	-	0.011	0.024	0.037	0.050
式 (10b)	1/50	0.136	0.211	0.287	0.362	0.437
	1/75	0.081	0.131	0.181	0.231	0.282
	1/100	0.053	0.091	0.128	0.166	0.204
	1/150	0.025	0.050	0.076	0.101	0.126

## 6 结论

建立了与受拉钢筋屈服强度和跨高比相关的 RC 连梁屈服位移角计算式, 以及与面积配箍特征值、跨高比和纵筋配筋率相关的 RC 连梁极限位移角的计算式; 对试验数据和计算结果进行了比较分析, 两者符合良好。在此基础上, 提出了有 1 倍方差的 RC 连梁基于位移的配箍特征值计算式。

### 参 考 文 献

[1] M. J. N Priestley. Performance based seismic design. In: Proceedings of 12th World Conference on Earthquake Engineering, 2000, Paper No. 2831.

[2] Michael P. Berry, Practical performance model for bar buckling, Journal of Structural Engineering, 2005, 131(7): 1060-1070.

[3] Ingo Brachmann. Drift - dependent confinement requirements for reinforced concrete columns under cyclic loading, ACI Structural Journal, 2004, 101(5): 669-677.

[4] Telemachos B. Panagiotakos. Deformations of reinforced concrete members at yielding and ultimate. ACI Structural Journal, 2001, 98

(2): 135-148.

[5] ATC. NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings, FEMA Report 273, Applied Technology Council for the Building Seismic Safety Council, Washington D. C., 1997.

[6] ATC. NEHRP Commentary on Guidelines for the Seismic Rehabilitation of Buildings, FEMA Report 274, Applied Technology Council for the Building Seismic Safety Council, Washington D. C., 1997.

[7] ASCE. FEMA 356 prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings, ASCE for the Federal Emergency Management Agency, Washington, D. C., 2000.

[8] T. Paulay. Simulated seismic loading of spandrel beams, Journal of Structural Division, Proceedings of the ASCE, 1971, 97 (ST9): 2407-2413.

[9] Galano Luciano. Behavior of short coupling beams with different reinforcement layouts, ACI Structural Journal, 2000, 97(6): 876-885.

[10] A. K. H. Kwan. Cyclic behavior of deep reinforced concrete coupling beams. Proceedings of Institution of Civil Engineering, 2002, Paper No. 12681.

[11] T. Paulay. Coupling beams of reinforced concrete shear walls. Journal of Structural Division, Proceedings of the ASCE, 1971, 97 (ST3): 843-862.

[12] M. J. N., Priestley. Concepts and procedures for direct displacement - based design and assessment. Proceedings of Seismic Design Methodologies for the Next Generation of Codes, Bled, Slovenia, 1997.

[13] 方鄂华. 高层建筑钢筋混凝土结构概念设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[14] 混凝土结构设计规范(GB50010-2002)[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.

(上接第 5-62 页)

算例 2: 对称配筋矩形截面,  $h \times b = 600 \times 400$ ,  $a = 45\text{mm}$ , C40 混凝土, HRB400 钢筋, 4 组不同设计内力, 用三种方法计算的配筋面积见表 2。下面以  $N = 4\ 000\text{kN}$ ,  $M = 600\text{kN} \cdot \text{m}$  为例说明叠加法和轴力分配法的计算过程。

叠加法: 式(12)界线点是:  $f_c b a = 343.8\text{kN}$ ,  $f_c b h_0 = 4\ 240.2\text{kN}$ 。  $N = 4\ 000\text{kN}$ , 在式(12)的第二式中, 把设计内力和材料强度代入求得  $M_{s0} = 447.12\text{kN} \cdot \text{m}$ , 则  $A_s = M_{s0} / f_y (h - 2a) = 2\ 435\text{mm}^2$ , 可见计算十分方便。

轴力分配法: 方程(15)是  $A_s$  的三次方程。采用迭代方法计算。  $A_s$  初值用叠加法结果, 即  $A_s^{(1)} = 2\ 435\text{mm}^2$ 。

第二次迭代: 用  $A_s^{(1)}$  求钢筋轴力  $N_{s0}^{(1)} = 2f_y A_s^{(1)} = 1\ 753.2\text{kN}$ , 分配混凝土轴力:

$$\frac{N - N_{cb}}{N_{c0} + N_{s0}^{(1)} - N_{cb}} = \frac{N_c - N_{cb}}{N_{c0} - N_{cb}}$$

得到  $N_c^{(2)} = 3\ 257.75\text{kN}$ , 故  $M_c^{(2)} = 282.5\text{kN} \cdot \text{m}$  进一步

可求得

$$M_s^{(2)} = M - M_c^{(2)} = 317.5\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$N_s^{(2)} = N - N_c^{(2)} = 740.25\text{kN}$$

由  $M_s^{(2)} = (1 - N_s^{(2)} / N_{s0}^{(1)}) M_{s0}^{(2)}$  得  $M_{s0}^{(2)} = 549.5\text{kN} \cdot \text{m}$ ,  $A_s^{(2)} = M_{s0}^{(2)} / f_y (h - 2a) = 2\ 993\text{mm}^2$ 。以后反复迭代直到误差小于 2% 为止, 得到  $A_s = 2\ 841\text{mm}^2$ 。

从表 2 可以看出, 组合(1), (2)配筋率较大, 组合(3), (4)配筋率较小。组合(1), (3)为大偏压, 组合(2), (4)为小偏压。轴力分配法在小偏压时比较精确, 但是也需要迭代。叠加法配筋与规范法比较误差不大, 可满足工程计算的精度要求, 且计算十分简便。

### 参 考 文 献

[1] 混凝土结构设计规范(GB50010-2002)[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.

[2] 钢筋混凝土结构设计规程(YB9082-97)[S]. 冶金工业出版社, 1998.

[3] 叶列平, 赵树红, 方鄂华. 钢筋混凝土构件正截面承载力计算[J]. 工程力学, 1999, 6(2): 29-36.

[4] 徐秉业, 陈森灿. 塑性理论简明教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1981.