

# 直接基于应力状态相似的一致相似率

曲哲

2014-10-1

作为量纲分析的基础的 **Buckingham- $\pi$ 理论**实际上只是告诉我们：对于一个包含  $n$  个变量的物理关系，如果有  $m$  个独立的量纲，则总可以将其表达为  $m$  个数量为 1 的有量纲量和  $(n-m)$  个无量纲量之间的物理关系。简单地说，对于一般的工程应用，只有 3 个独立的量纲（比如时间、长度、质量），那么任何物理关系中的任何变量都可以用这 3 个有量纲量归一化为无量纲量。

工程结构试验中常用的变量及其相似率符号如表 1 所列。在用于地震模拟振动台试验的缩尺模型的设计中，主要限制条件包括：

- (1) 振动台尺寸——决定模型的长度相似率 ( $S_L$ )；
- (2) 振动台承载能力——决定模型的质量相似率 ( $S_M$ )；
- (3) 振动台的出力——通过加速度相似率 ( $S_a$ ) 间接影响模型的质量相似率 ( $S_M$ )；
- (4) 缩尺模型的材料——决定模型的弹性模量/应力相似率 ( $S_E = S_\sigma$ )。

由于在试验过程中无法改变重力加速度 ( $S_g \equiv 1$ )，故质量相似率 ( $S_M$ ) 与长度相似率 ( $S_L$ ) 共同决定了模型的竖向应力相似率 ( $S_{\sigma_v}$ )。对于常见的建筑结构，竖向应力水平对结构的侧向承载力有显著的影响。这一现象在混凝土结构和砌体结构中表现得尤为明显。当竖向应力相似率 ( $S_{\sigma_v}$ )、剪应力相似率 ( $S_\tau$ ) 和弹性模量相似率 ( $S_E$ ) 三者不协调时，结构模型的应力水平失真，结构的损伤与破坏过程也会相应的失真。因此，在设计缩尺模型时应考虑上述三个应力相似率的统一。

以长度、弹性模型和竖向应力为三个独立的变量进行量纲分析，可得如表 1 所列的 6 种相似率关系。其中相似率 (1) 是最一般的形式，其推导过程如下。

已知  $S_L$  (取决于台面尺寸)， $S_E$  (取决于所用材料) 和  $S_M$  (取决于台面载荷)，则竖向应力相似率

$$S_{\sigma_v} = \frac{S_M S_g}{S_L^2} = \alpha \quad (1)$$

由于  $S_g \equiv 1$ ，有  $S_M = \alpha S_L^2$ ，记  $S_E = e$ ，则有

$$S_T = \sqrt{\frac{S_M}{S_E S_L}} = \sqrt{\frac{\alpha S_L}{e}} \quad (2)$$

$$S_a = \frac{S_L}{S_T^2} = \frac{e}{\alpha} \quad (3)$$

$$S_v = \frac{S_L}{S_T} = \sqrt{\frac{e S_L}{\alpha}} \quad (4)$$

$$S_Q = S_M S_a = S_L^2 e \quad (5)$$

$$S_\tau = \frac{S_Q}{S_L^2} = e \quad (6)$$

表 1 中的相似率 (2) ~ (6) 均为相似率 (1) 的某种特例。其中，(2) 和 (3) 为采用非原型材料的情况，即弹性模量相似比不等于 1 ( $e \neq 1$ )；而 (4) ~ (6) 为采用原型材料的

情况 ( $e=1$ )。

在上述相似率中, (3) 和 (6) 即为通常所说的“忽略重力相似率”。这时, 当材料密度相似比等于 1 时, 模型的竖向应力水平的相似比  $\alpha = S_L$ 。这时结构模型中的应力状态失真, 试验得到的结构损伤与破坏现象也可能失真。尽管如此, 国内很多高校仍在地震模拟振动台试验中采用这种相似率。

(2) 和 (5) 为“全质量相似率”。对于采用原型材料的 (5), 模型的竖向应力水平的相似比  $\alpha = 1$ 。在这种情况下, 竖向应力、剪应力和弹性模型的相似比均为 1, 模型的应力状态与原型相同, 试验结果最接近原型。与之类似, 对于采用非原型材料的 (2), 可将竖向应力水平的相似比  $\alpha$  设为与弹性模量相似比相同, 即  $\alpha = e$ , 从而使竖向应力、剪应力和弹性模型的相似比均为  $e$ , 模型的应力状态与原型具有统一的比例关系, 模型的损伤与破坏过程仍应接近于原型, 因此 (2) 也称为“全质量相似率”。(2) 和 (5) 即为通常所说的“人工质量相似率”

受限于振动台的竖向承载能力, 相似率 (5) 往往难以满足, 故常采用相似率 (4)。值得注意的是, 当采用非原型材料, 且非原型材料的弹性模型相似比小于 1 时 ( $e < 1$ ), 根据应力状态相似的原则, 可以减小质量相似比, 即从  $S_L^2$  降低至  $eS_L^2$ 。

综上所述, 基于应力状态相似的原则, 在模型设计中应考虑尽量满足相似率 (2) 或 (5)。若无法满足, 则退而求其次, 以 (1) 或 (4) 为准 (即通常所说的“欠质量相似率”), 但在解读试验结果时应注意应力状态不同而引起的误差。

黄维平等 (1994) 推导的空载、半载、满载情况下的相似关系<sup>[1]</sup>均为表 1 所列的相似率 (1) 的特例。表 1 与张敏政 (1997) 提出的“一致相似率”<sup>[2]</sup>在本质上也是相同的。这些推导都只不过是对于基于 Buckingham- $\pi$  原理的量纲分析的具体应用而已。

但与一致相似率不同的是, 上述推导中没有出现密度相似比 ( $S_\rho$ )。这是因为, 在采用人工质量的缩尺模型中, 密度与质量和长度之间的量纲关系 ( $S_\rho = S_M/S_L^3$ ) 已无实际意义。对于可用的模型材料, 模型的质量除了来自于结构构件本身的重量之外, 很大一部分来自人工质量。上述推导也没有采用“等效质量密度”的概念。这是因为, 密度对结构反应的影响往往不显著, 在模型设计中并非关键参数, 因此没有必要认真加以考虑, 只要根据所采用的材料的密度正确的计算结构模型的自重, 再采用合适的人工质量保证质量相似比即可。

基于表 1 给出的相似率, 振动台试验缩尺模型相似设计的基本步骤如下:

1. 根据台面尺寸确定长度相似比  $S_L$ ;
2. 根据所选用的材料确定弹性模型 (应力) 相似比  $S_E$  ( $S_\sigma$ ), 即参数  $e$ ;
3. 综合考虑台面承载力和水平加速度出力, 选择合适的竖向应力相似比  $S_{\sigma v}$ , 即参数  $\alpha$ 。
4. 通过上述三个参数推算其他各个相似比。

此外, 当采用非原型材料 (如微粒混凝土) 时, 材料的承载力和弹性模量与原型材料的比例关系往往不一致, 且比较复杂, 这时或可以采用基于割线刚度的分级相似比<sup>[3]</sup>。

## 参考文献

- [1] 黄维平, 郭瑞锋, 张前国. 配重不足时的动力试验模型与原型相似关系问题的探讨. 地震工程与工程振动, 14(4), 1994: 64-71.
- [2] 张敏政. 地震模拟实验中相似律应用的若干问题. 地震工程与工程振动, 17(2), 1997: 52-58.
- [3] 张敏政, 孟庆利, 刘晓明. 建筑结构的模拟试验研究. 工程抗震, (4), 2003: 31-35.

表 1: 直接基于竖向应力水平的相似率

物理量	相似比	非原型材料	非原型材料	非原型材料	原型材料	原型材料	原型材料
		欠质量相似率	全质量相似率	忽略重力相似率*	欠质量相似率	全质量相似率	忽略重力相似率*
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
		$e \neq 1, S_L \leq \alpha \leq 1$	$e \neq 1, \alpha = e$	$e \neq 1, \alpha = S_L$	$e = 1$	$e = 1, \alpha = 1$	$e = 1, \alpha = S_L$
长度(位移)	$S_L$	$S_L$	$S_L$	$S_L$	$S_L$	$S_L$	$S_L$
弹性模量(应力)	$S_E(S_\sigma)$	$e$	$e$	$e$	1	1	1
<b>竖向应力</b>	<b><math>S_{\sigma_v}</math></b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b><math>e</math></b>	<b><math>S_L</math></b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b>1</b>	<b><math>S_L</math></b>
质量	$S_M$	$\alpha S_L^2$	$e S_L^2$	$S_L^3$	$\alpha S_L^2$	$S_L^2$	$S_L^3$
重力加速度	$S_g$	1	1	1	1	1	1
时间/周期	$S_T$	$\sqrt{\alpha S_L/e}$	$\sqrt{S_L}$	$S_L/\sqrt{e}$	$\sqrt{\alpha S_L}$	$\sqrt{S_L}$	$S_L$
速度	$S_v$	$\sqrt{e S_L/\alpha}$	$\sqrt{S_L}$	$\sqrt{e}$	$\sqrt{S_L/\alpha}$	$\sqrt{S_L}$	1
加速度	$S_a$	$e/\alpha$	1	$e/S_L$	$1/\alpha$	1	$1/S_L$
剪力	$S_Q$	$e S_L^2$	$e S_L^2$	$e S_L^2$	$S_L^2$	$S_L^2$	$S_L^2$
剪应力	$S_\tau$	$e$	$e$	$e$	1	1	1

\*对于忽略重力相似率, 假设密度相似比  $S_\rho = 1$ 。