振型参与质量的计算方法 （曲哲，**2014.12.24**）

无阻尼多自由度体系在地震作用下的运行方程为：

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{y}\}+[\mathrm{K}]\{y\}=-[\mathrm{M}]\{1\}\ddot{y}_0 \tag{1}$$

令$\{y\}=[\Phi]\{q\}$，则有$\{\ddot{y}\}=[\Phi]\{\ddot{q}\}$，代入式(1)有

$$[\mathrm{M}][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\mathrm{K}][\Phi]\{q\}=-[\mathrm{M}]\{1\}\ddot{y}_0 \tag{2}$$

两边同时右乘$[\Phi]^{\mathrm{T}}$，有

$$[\Phi]^T[\mathrm{M}][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[\mathrm{K}][\Phi]\{q\}=-[\Phi]^T[\mathrm{M}]\{1\}\ddot{y}_0 \tag{3}$$

$$[\mathrm{M}]_\phi\{\ddot{q}\}+[\mathrm{K}]_\phi\{q\}=-[\Phi]^T[\mathrm{M}]\{1\}\ddot{y}_0 \tag{4}$$

其中$[\mathrm{M}]_\phi$与$[\mathrm{K}]_\phi$均为对角阵。故式(3)可写作

$$\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_s\ddot{q}_{\mathrm{s}}+\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{K}]\{\phi\}_s q_{\mathrm{s}}=-\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{1\}\ddot{y}_0,\qquad \mathrm{s}=1\sim\mathrm{N} \tag{5}$$

$$\ddot{q}_{\mathrm{s}}+\frac{K_{\mathrm{s}}}{M_{\mathrm{s}}}q_{\mathrm{s}}=-\frac{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{1\}}{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_s}\ddot{y}_0,\qquad \mathrm{s}=1\sim\mathrm{N} \tag{6}$$

定义振型参与系数（modal participation factor，刺激係数）

$$\beta_{\mathrm{s}}=-\frac{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{1\}}{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_s} \tag{7}$$

相应地，$\beta_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}}$称为振型参数向量（刺激関数），与振型归一化方法无关。

另有展开定理如下。设$\{x\}$可展开为$\{x\}=\sum_{\mathrm{s}}\alpha_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}}$，其展开系数$\alpha_{\mathrm{s}}$可计算如下：

两边同时右乘$\{\phi\}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}[\mathrm{M}]$，根据振型正交性有，

$$\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{x\}=\alpha_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_{\mathrm{s}} \tag{8}$$

$$\alpha_{\mathrm{s}}=-\frac{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{x\}}{\{\phi\}_{\mathrm{s}}^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_s} \tag{9}$$

对比式(7)和式(9)可知，β_{s}即为$\{1\}$的展开系数，于是有

$$\{1\}=\sum_{\mathrm{s}}\beta_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}} \tag{10}$$

结构总质量

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{i}}m_{\mathrm{i}}=\{1\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{M}]\{1\}&=\left(\sum_{\mathrm{s}}\beta_{\mathrm{s}}\{\phi\}_s^T\right)[\mathrm{M}]\left(\sum_{\mathrm{s}}\beta_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}}\right)\\&=\sum_{\mathrm{s}}\beta_s^2\{\phi\}_s^T[\mathrm{M}]\{\phi\}_{\mathrm{s}}=\sum_{\mathrm{s}}\beta_s^2 M_{\mathrm{s}}\end{aligned} \tag{11}$$

可见，以振型参与向量$\beta_{\mathrm{s}}\{\phi\}_{\mathrm{s}}$为振型向量得到的振型质量$\beta_s^2 M_{\mathrm{s}}$与振型归一化方法无关，且其和等于结构总质量，可作为振型参与质量。